

مثال: أهدرت دراسة إحدى الجامعات للمقارنة بين المعدلات التي حصلت عليها مجموعتان من الطلبة الأولى من المتروطين، والثانية من غير المتروطين، وهذه الغاية أخذت عينتان واحدة من كل منهما وفيما يلي إحصاء المقام كانت لدينا النتائج التالية:

$$n = 100, \bar{X} = 28.5, S_1 = 4, \mu_1 \text{ عينة المتروطين}$$

$$m = 100, \bar{Y} = 27.3, S_2 = 3, \mu_2 \text{ عينة غير المتروطين}$$

المطلوب: عين فيال الثقة للفرق بين متوسطي العينة $\mu_1 - \mu_2$ وذلك على مستوى أهمية $\alpha = 0.05$. حيث $Z = 1.96$.

الحل: بما أن مفوضنا في حجم العينة الأولى ولهم العينة الثانية أكبر من 30 عندئذ يمكن أن نفوض عند كل μ_1 و μ_2 أو كل σ_1^2 و σ_2^2 على تقديره بالنسبة لهما ونسب الكلام بالنسبة للعينة الثانية. ومن أجل إيجاد فيال الثقة $\mu_1 - \mu_2$ نبحث عن كمية صورية ثابته في هذه الكمية هي

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0, 1)$$

$$\text{بما أن } \sigma_1^2 = S_1^2, \sigma_2^2 = S_2^2, n=100, m=100$$

بعد ذلك نحضر هذه الكمية لتأخذ شكل معلوم من جدول توزيع الكمية المحورية. بما فيال قدره $1 - \alpha$ علماً بأن $\alpha = 0.05$ و $1 - \alpha = 0.95$ و $Z = 1.96$ بعد ذلك نحري عملية الفل $\mu_1 - \mu_2$ فنصل على فيال الثقة المطلوب وهو

$$[(\bar{X} - \bar{Y}) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}; (\bar{X} - \bar{Y}) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}]$$

$$= [(\bar{X} - \bar{Y}) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}; (\bar{X} - \bar{Y}) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}]$$

$$= [(28.5 - 27.3) - (1.96) \sqrt{\frac{16}{100} + \frac{9}{100}}; (28.5 - 27.3) + (1.96) \sqrt{\frac{16}{100} + \frac{9}{100}}]$$

$$= [1.2 - 0.98; 1.2 + 0.98] \Rightarrow \text{موجب} \leftarrow \mu_1 - \mu_2 \text{ وهو فيال الثقة}$$

إذا طلبوا ما المقدار النقطة للفرق $\mu_1 - \mu_2$ فنقول هو

$$\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 = \bar{X} - \bar{Y}$$

إذا قالوا ماهو الخطأ المترتب في تقدير $\mu_1 - \mu_2$ فالبال على هذا مستوى الأهمية متجدد.

$$e = 1 - z_1 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n} + \frac{s_2^2}{m}} = 0,98$$

إذا طلب مناسقة النتيجة

عما أن طرفي فال الثقة موجبة فإن $\mu_1 > \mu_2 \Rightarrow \mu_1 - \mu_2 > 0$ إذا
معدلات المتروطين أكبر فمعدلات غير المتروطين

نظم نظري

إيجاد فال الثقة للفروق بين متوسطي مجموعتين إحصائيتين طبيعيتين متباينتين متراكمتين
و تفهول

نفر من أنه لدينا مجموعتين إحصائيتين طبيعيتين الأولى $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ والثاني
 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ولناخذ من المجتمع الأول عينة حجمها n ومتوسطها \bar{X} وانحرافها s_1^2
ونباينها s_1^2 ولنأخذ من المجتمع الثاني عينة حجمها m ومتوسطها \bar{Y} وانحرافها s_2^2 وبناباينها s_2^2 وانحرافها
هو s_2

من أجل ذلك سوف نكتب عن كمية قياسية وهذه الكمية هي:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{SP \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t(n+m-2)$$

$$SP \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}$$

$$= SP = \sqrt{\frac{(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2}{n+m-2}} \Rightarrow SP = \sqrt{\frac{(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2}{n+m-2}}$$

لهذا ذلك فمعرفة الكمية المحورية في كميتين معلومتين من جدول توزيع الكمية المحورية
بإمكان قدره $1-\alpha$

$$P(-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2) \leq T \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P(-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2) \leq \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{SP \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)) = 1-\alpha$$

وهنا ثم نحري كملج العزل $\mu_1 - \mu_2$:

$$\Rightarrow P(-SP t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2) \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \leq \bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2) \leq SP t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2) \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}) = 1-\alpha$$

$$SP t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2) \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = 1-\alpha$$

$$\text{نضيف للطرفين } (\bar{X} - \bar{Y}) \text{ ونضرب بإشارة (-)} \\ = P(\bar{X} - \bar{Y} - sp t_{1-\frac{\alpha}{2}(n+m-2)} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{X} - \bar{Y} + sp t_{1-\frac{\alpha}{2}(n+m-2)} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}) = 1 - \alpha$$

وبالتالي فإن مجال الثقة لهذه الحالة يعطى بالشكل

مثال: أظهرت أن نوعين من الأدوية فعليين قد شربتهما شركتان مختلفتان في بلد ما، ولكن بإمكانيات مختلفة. فمنا الشركة الأم وذلك لعلاج مرضها معدى. والهدف من الدراسة هو معرفة إذا كان تركيز المادة الفعالة في الدواء هو نفسه أم لا. ولقد ذلك أظهرت عنيت عشوائية هجها $n = 10$ من الدواء الأول وتبين أن متوسط كمية المادة الفعالة ليادي 3.1 ml وبانحراف معياري 0.5 ml وأظهرت عنيت من الدواء الثاني هجها $m = 8$

فكان متوسط المادة الفعالة في الدواء الثاني هو 2.7 ml وبانحراف معياري 0.7 ml . وإذا علمنا أن الكمية المحطة المادة الفعالة في الدواء لكل من الدواءين توضع للتوزيع الطبيعي وأن لها نفس التباين σ^2 (فصول) عندئذ عنيت مجال الثقة حول الفرق $\mu_1 - \mu_2$ حيث μ_1 هو متوسط المادة الأولى و μ_2 متوسط المادة الثانية وذلك على مستوى أهمية $\alpha = 0.05$. علماً أن $t_{0.975}(16) = 2.12$

الحل: لدينا

μ_1	σ_1	$n = 10$	$\bar{X} = 3.1$	$s_1 = 0.5$	X الدواء الأول
μ_2	σ_2	$m = 8$	$\bar{Y} = 2.7$	$s_2 = 0.7$	Y الدواء الثاني

من الواضح أن المعطيين طبيين وفيها σ^2 مشتركة وبسهولة و هو من المعينات صغيرة عندئذ من أجل إيجاد مجال الثقة $(\mu_1 - \mu_2)$ سوف نكتب عنيت كمية قياسية وهذه الكمية هي

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{SP \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t(16)$$

ونحن نضرب هذه الكمية بين كمتين معلومتين من جدول توزيع الكمية المحورية بإعقال قدره

0.95

ومن ثم نجرى عملية الفرق $(\mu_1 - \mu_2)$ لنحصل على مجال الثقة والذي يأخذ الشكل

$$[\bar{X} - \bar{Y} - sp t_{0.975}(16) \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}, \bar{X} - \bar{Y} + sp t_{0.975}(16) \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}]$$

$$SP = \frac{\sqrt{(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2}}{n+m-2} = 0,596$$

علماً بأن

$$\bar{X} - \bar{Y} = 0,4$$

$$\Rightarrow [0,4 - (0,596)(2,12)\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{8}}, 0,4 + (0,596)(2,12)\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{8}}]$$

$$= [-0,2 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 1]$$

إذا كان μ_1, μ_2 قصور بين عددين إحداهما سالب والأخرى موجبة فيكون

$$\mu_1 - \mu_2 = 0 \Rightarrow \mu_1 = \mu_2$$

5. إيجاد فاصل الثقة للنسبة للمجتمع

إن إيجاد فاصل الثقة للنسبة للمجتمع يعني إيجاد فاصل الثقة للوسط للمجتمع

الإحصائي البربولي لذلك نقرض أنه لدينا مجتمع إحصائي بربولي وسطه P

ولناخذ من هذا المجتمع الإحصائي عينة عشوائية حجمها n (أكبر من 30)

علماً أن $\bar{X} = \hat{P}$ عندئذٍ لوسط فاصل الثقة للوسط P على مستوى أهمية α للمعلم

الكل : من أجل إيجاد فاصل الثقة للوسط P سوف نكتب عن كمية عشوائية وهذه الكمية

$$Z_{\bar{X}} = \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{P \cdot q}{n}}} \sim N(0,1) \Rightarrow Z_{\bar{X}} = \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}$$

$$P(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha \Rightarrow$$

$$P(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \leq \hat{P} - P \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}) = 1 - \alpha$$

نضيف الأضراف \hat{P} ونضرب بـ (-)

$$\Rightarrow P(\hat{P} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \leq P \leq \hat{P} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}) = 1 - \alpha$$

$$[\hat{P} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} ; \hat{P} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}]$$

$$e = 1 \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$$

والخطأ المطلق الكافي هو :

ما هو حجم العينة اللازم إذا أردت أن يكون الخطأ المطلق الأعظمي أصغر أو يساوي ϵ ؟
عدد ثابت معلوم ؟

$$e \leq \epsilon \Rightarrow e^2 \leq \epsilon^2 \Rightarrow \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} Z_1^2 - \frac{\alpha}{2} \leq \epsilon^2$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{\epsilon^2} Z_1^2 - \frac{\alpha}{2}$$